МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"

О.Ф.Бацевич
Т.М.Сало

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

**курс лекцій для студентів
базового напрямку "Електромеханіка"**

Львів 2007

Лекція 1. **Основні поняття теорії диференціальних рівнянь. Рівняння з відокремленими змінними.**

Звичайним диференціальним рівнянням ***n-го порядку*** називається вираз виду

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

де x - незалежна змінна, y - шукана функція, $y', y'', ..., y^{(n)}$ - похідні функції $y(x)$. Якщо ж функція y залежить від декількох аргументів, то диференціальне рівняння називається ***рівнянням в частинних похідних*** .

Порядком диференціального рівняння називається порядок найвищої похідної, яку містить дане рівняння.

Розв'язком диференціального рівняння (1) називається функція $y = \varphi(x)$, яка при її підстановці перетворює це рівняння в тотожність :

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), ..., \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0.$$

При цьому лінія $y = \varphi(x)$ на площині xOy називається ***інтегральною кривою*** диференціального рівняння.

Функція $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, що залежить від змінної x, містить n сталих $C_1, C_2, ..., C_n$, і є розв'язком рівняння (1) при довільних значеннях цих сталих, називається його ***загальним розв'язком*** .

Надавши сталим $C_1, C_2, ..., C_n$ конкретні значення $C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0$, одержимо деяку функцію $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0)$, яка називається ***частинним розв'язком*** диференціального рівняння (1). Отже, частинним розв'зком є функція, що одержується при певному наборі значень сталих .

Змінюючи значення сталих $C_1, C_2, ..., C_n$, на площині xOy одержимо різноманітні лінії $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, кожна з яких є інтегральною кривою даного диференціального рівняння - ***сімейство інтегральних кривих*** .

Вираз

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0,$$

що визначає функцію $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ неявно , називається ***загальним інтегралом*** диференціального рівняння (1).

Задачею Коші для диференціального рівняння (1) називається задача про знаходження його певного частинного розв'язку, тобто певної інтегральної кривої $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0)$. Для цього потрібно знайти аналітичну форму функції $\varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, а також відповідні значення сталих $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$.

Для знаходження значень сталих $C_1, C_2, ..., C_n$ в задачі Коші задаються так звані ***початкові умови*** - деякі додаткові умови, яким повинна задовольняти функція y.

Загальний розв'язок диференціального рівняння 1-го порядку

$$F(x, y, y') = 0,$$

- функція $y = \varphi(x, C)$ - містить лише одну сталу С. Початковою умовою в цьому випадку є положення точки (x_0, y_0), через яку проходить інтегральна крива $y = \varphi(x, C)$. У випадку диференціальних рівнянь вищих порядків початкові умови за змістом виражають особливості форми інтегральної кривої в деякій точці (x_0, y_0) - нахил дотичної, кривину і т. д., і задаються у вигляді значень похідних фунції y в цій точці.

Рівняння з відокремленими змінними

До цього типу відносять рівняння виду

$$y' = f(x)g(y) \quad (g(y) \neq 0).$$

Для розв'язування рівняння цього типу спочатку необхідно ***відокремити змінні*** , тобто переписати його таким чином, щоб ліва його частина містила залежність лише від змінної x, а права - лише від змінної y (або навпаки). Підставивши $y' = \frac{dy}{dx}$ і відокремивши змінні, одержимо

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Цей вираз можна розглядати, як рівність перших диференціалів деяких функцій, одна з яких залежить від змінної x, а друга від змінної y. Враховуючи те, що первісні функцій, перші диференціали яких рівні, можуть відрізнятись лише на деяку сталу С, запишемо для первісних

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C.$$

Обчисливши невизначені інтеграли, одержимо вираз виду

$$\Phi(x, y, C) = 0,$$

який називається ***загальним інтегралом*** диференціального рівняння. Визначивши звідси $y = \varphi(x, C)$, одержимо загальний розв'язок даного рівняння.

Приклад 1. Розв'язати диференціальне рівняння

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2+1}} = y' \ln^2 y.$$

Підставимо $y' = \dfrac{dy}{dx}$; тоді $\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+1}} = y' \ln^2 y = \ln^2 y \dfrac{dy}{dx}$.

Звідси

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int \ln^2 y\,dy + C.$$

Виконавши інтегрування, знаходимо загальний інтеграл заданого рівняння

$$\ln^3 y = 3\sqrt{x^2+1} + C.$$

Приклад 2. Розв'язати диференціальне рівняння

$$x^2 e^y + (x^3+1)y' = y'(x^3+1)e^{2y}.$$

Після спрощення виразу і підстановки $y' = \frac{dy}{dx}$ одержуємо

$$x^2 e^y = y'(x^3+1)(e^{2y}-1); \qquad \frac{x^2}{x^3+1}dx = (e^y - e^{-y})dy.$$

Звідси
$$e^y + e^{-y} = |\sqrt[3]{x^3+1}| + \ln C = \ln(C|\sqrt[3]{x^3+1}|) \quad (C > 0).$$

Приклад 3. Знайти розв'язок задачі Коші
$$(2 - e^y)\, dx - e^{3y}\, cos^2 x\, dy = 0; \qquad y(\frac{\pi}{4}) = 0.$$

Після відокремлення змінних маємо
$$\frac{dx}{cos^2 x} = \frac{e^{3y}}{2-e^y} dy; \qquad \int \frac{dx}{cos^2 x} = \int \frac{e^{3y}}{2-e^y} dy + C;$$
$$tg\, x = \int \frac{e^{3y}}{2-e^y} dy = \int \frac{e^{3y}}{2-e^y} dy = \left| \begin{array}{l} 2 - e^y = t, \\ -e^y\, dy = dt, \\ e^y = 2 - t \end{array} \right| = \int \frac{(2-t)^2}{t} dt =$$
$$= -\int \frac{4 - 4t + t^2}{t} dt = -\int \left(\frac{4}{t} - 4t + t^2\right) dt = -4\ \ln|t| + 4t - \frac{t^2}{2} + C =$$
$$= -4\ \ln|2 - e^y| + 4(2 - e^y) - \frac{2 - e^y}{2} + C.$$

При $x = \frac{\pi}{4}$, $\quad y = 0 \quad$ маємо $\quad 1 = 4 - 0.5 + C; \quad C = -2.5.$

Підставивши значення сталої C у попередній вираз, маємо розв'язок задачі Коші
$$tg\, x = -4\ \ln|2 - e^y| + \frac{2 - e^y}{2}(6 + 2^y) - 2.5.$$

Одержений вираз є неявним визначенням функції $y(x)$ (явний її вигляд тут знайти не вдасться), і називається ***частинним інтегралом*** ; від загального інтеграла він відрізняється тим, що сталій C надано значення, знайдене за допомогою початкової умови.

Лекція 2. **Однорідні рівняння.**

Диференціальне рівняння 1 - го порядку називається ***однорідним*** , якщо його можна звести до вигляду
$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2}$$

Для розв'язання однорідного диференціального порядку перейдемо до нової невідомої функції
$$u = u(x) = \frac{y}{x}. \qquad \text{Тоді} \qquad y = u\, x, \qquad y' = u'\, x + u.$$

Підставляючи це в рівняння (2), одержуємо
$$xu' + u = f(u); \qquad xu' = x\frac{du}{dx} = f(u) - u.$$

Маємо рівняння з відокремленими змінними : $\quad \dfrac{dx}{x} = \dfrac{du}{f(u) - u}.$

Нехай $f(u) \neq u$. Прирівнюючи первісні лівої і правої частин останнього виразу, одержуємо:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{f(u) - u};$$

$\ln|x| = F(u) + C = F\left(\frac{y}{x}\right) + C$, де - $F(u)$ - первісна функції $\frac{1}{f(u) - u}$.

Приклад 1. Розв'язати диференціальне рівняння $x\, y^2 y\,' = y^3 + x^2$.

Знаходимо $y\,' = \frac{y}{x} + \left(\frac{x}{y}\right)^2$.

Маємо однорідне диференціальне рівняння. Підставимо

$$y = u\, x; \quad y\,' = u\, x' + u; \quad u\,' x + u = u + \frac{1}{u^2}; \quad u^2 du = \frac{dx}{x},$$

$$\text{звідки} \quad \frac{u^3}{3} = ln\,|Cx|, \qquad \text{або} \qquad y^3 = 3x^3\, ln\,|Cx| \quad (C > 0).$$

До однорідних зводяться також рівняння виду $y\,' = \left(\frac{a_1 x + b_1 + c_1}{a_2 x + b_2 + c_2}\right)$.

Тут може бути два випадки:

1) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$. Для зведення цього рівняння до однорідного попередньо потрібно зробити заміну $x = x_0 + u$, $y = y_0 + v$, де x_0, y_0 - розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 + c_1 = 0, \\ a_2 x + b_2 + c_2 = 0. \end{cases}$$

Така заміна відповідає перенесенню початку координат в точку (x_0, y_0), в якій перетинаються прямі $a_1 x + b_1 + c_1 = 0$ та $a_2 x + b_2 + c_2 = 0$.

2) Якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$, то вказані вище прямі не перетинаються. В цьому випадку для зведення рівняння до однорідного переходимо до нової функції $z = z(x)$, покладаючи, наприклад, $z = a_1 x + b_1$, або $z = a_1 x + b_1 + c_1$.

Приклад 2. Розв'язати диференціальне рівняння $y\,' = \frac{y + 2}{2x + y - 4}$.

Маємо тут перший з розглянутих вище випадків. Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} y + 2 = 0, \\ 2x + y - 4 = 0, \end{cases}$$

знаходимо $x_0 = 3$, $y_0 = -2$.
Зробимо заміну $x = u + x_0 = u + 3$, $y = v + y_0 = v - 2$. Тоді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(v-2)}{d(u+3)} = \frac{dv}{du}; \quad \frac{y+2}{2x + y - 4} = \frac{v - 2 + 2}{2(u+3) + v - 2 - 4} = \frac{v}{2u + v} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{du} = \frac{v}{2u + v}.$$

В даному випадку рівняння зручно розв'язувати, вважаючи аргументом змінну v, а аргументом - змінну u, і записавши

$$\frac{du}{dv} = \frac{2u+v}{v} = 2\frac{u}{v} + 1.$$

Позначимо $u/v = z$; $u = v\,z$; $z = z(v)$. Тоді

$$\frac{du}{dv} = v\frac{dz}{dv} + z = 2z + 1; \quad v\frac{dz}{dv} = z + 1; \quad \frac{dz}{z+1} = \frac{dv}{v},$$

$$\text{звідки} \quad \ln|z+1| = \ln|v| + \ln C_1 \quad (C_1 > 0);$$

$$|z+1| = C_1|v|; \quad |\frac{u}{v} + 1| = C_1\,|v|; \quad u + v = \pm C_1 v^2$$

Множник $\pm C_1$, де $C_1 > 0$, може приймати довільні значення, не рівні нулю. Позначимо $\pm C_1 = C$ і підставимо $u = x - 3$, $v = y + 2$.

Одержуємо загальний інтеграл рівняння: $x + y - 1 = C\,(y+2)^2$.

Лекція 3. **Лінійні диференціальні рівняння 1 - порядку. Рівняння Бернуллі.**

До цього типу належать рівняння виду

$$y' + P(x)\,y = Q(x). \tag{3}$$

де шукана функція y та її похідна y' входять кожна лише в першому степені.

Теорема: Нехай функції $P(x)$ та $Q(x)$ неперервні в інтервалі $a < x < b$. Тоді через кожну точку (x_0, y_0), $a < x_0 < b$, $-\infty < y_0 < \infty$, проходить лише одна інтегральна крива $y = y(x)$ рівняння (3), причому функція $y(x)$ визначена для всіх $a < x < b$.

При $Q(x) \equiv 0$ одержуємо ***відповідне заданому неоднорідному лінійне однорідне*** диференціальне рівняння 1 - го порядку:

$$y' + P(x)\,y = 0. \tag{4}$$

Очевидно, що функція $y \equiv 0$ є розв'язком рівняння (4); інші розв'язки знаходимо, відокремивши змінні:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -P(x)\,y; \quad \frac{dy}{y} = -P(x)\,dx; \quad \ln|y| = -\int P(x)\,dx + \ln C_1 \quad (C_1 > 0),$$

звідки

$$y = Ce^{-\int P(x)\,dx}, \quad C \neq 0. \tag{5}$$

Ця формула охоплює всі розв'язки рівняння (4). Його частинний розв'язок, який відповідає початковій умові $y(x_0) = y_0$, тобто інтегральну криву, яка проходить через точку $(x_0), y_0)$, можна записати у вигляді

$$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} P(\xi)\,d\xi}.$$

Розглянемо методи розв'язування лінійного неоднорідного диференціального рівняння (3).

Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа).

Використаємо вираз (5) для загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння (4):

$$y = Ce^{-\int P(x)\,dx}.$$

Відповідно до ідеї вищеназваного методу, замінимо сталу C деякою диференційовною функцією $C(x)$, підібравши її таким чином, щоб вираз

$$y(x) = C(x)e^{-\int P(x)\,dx}$$

був загальним розв'язком рівняння (3). Для цього знайдемо похідну

$$y\,'(x) = C\,'(x)e^{-\int P(x)\,dx} + C(x)\left(e^{-\int P(x)\,dx}\right)' =$$

$$= C\,'(x)e^{-\int P(x)\,dx} + C(x)e^{-\int P(x)\,dx}\left(-\int P(x)\,dx\right))' =$$

$$= C'(x)e^{-\int P(x)\,dx} + C(x)e^{-\int P(x)\,dx}(-P(x)) = C'(x)e^{-\int P(x)\,dx} - P(x)C(x)e^{-\int P(x)\,dx}.$$

Підставимо вирази для $y(x)$ та $y\,'(x)$ в рівняння (3):

$$C'(x)e^{-\int P(x)\,dx} - \underbrace{P(x)C(x)e^{-\int P(x)\,dx}} + \underbrace{P(x)C(x)e^{-\int P(x)\,dx}} = Q(x).$$

Звідси

$$C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)\,dx}; \quad C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}dx + C_1.$$

Одержуємо вираз для загального розв'язку рівняння лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$y(x) = C_1 e^{-\int P(x)\,dx} + e^{-\int P(x)\,dx}\int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}dx.$$

Приклад 1. Знайти розв'язок задачі Коші на проміжку (-1;1):

$$y\,' - \frac{y}{1-x^2} = 1 + x; \quad y(0) = 1.$$

На проміжку (-1;1) виконуються умови теореми про існування розв'язку задачі Коші. Для її розв'язання потрібно знайти загальний розв'язок заданого рівняння, а потім за допомогою початкової умови знайти значення довільної сталої, яка міститься в загальному розв'язку.

Знайдемо розв'язок відповідного лінійного однорідного диференціального

рівняння $\quad y\,' - \dfrac{y}{1-x^2} = 0;\ \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{1-x^2};\ \displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1-x^2};$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + \ln C_1.$$

Оскільки $\quad \dfrac{1+x}{1-x} > 0 \quad$ при $\quad x \in (-1;1), \quad$ то $\quad y \equiv \overline{y}(x) = C\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}, \quad C \neq 0.$

Розв'язок заданого неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y = \widetilde{C}(x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}. \quad \text{Маємо} \quad y' = \widetilde{C}'(x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \widetilde{C}(x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1}{(1-x)^2}$$

Підставивши вирази для y та y' в задане рівняння, одержимо

$$\widetilde{C}'(x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \widetilde{C}(x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} - \widetilde{C}(x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{1}{1-x^2} = 1+x.$$

Звідси знаходимо

$$\widetilde{C}'(x) = \sqrt{1-x^2} = \frac{d\widetilde{C}(x)}{dx}; \; d\widetilde{C}(x) = \sqrt{1-x^2}dx;$$

$$\widetilde{C}(x) = \int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + C_2 \quad (C_2 - \text{довільна стала}).$$

Тепер можемо записати загальний розв'язок рівняння

$$y(x) = \widetilde{C}(x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot (\arcsin x + x\sqrt{1-x^2} + 2C_2).$$

За допомогою початкової умови знайдемо значення сталої C_2:

$$y(0) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (0+0+2C_2) = 1; \quad C_2 = 1.$$

Отже, розв'язком заданої задачі Коші є функція

$$y(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot (\arcsin x + x\sqrt{1-x^2} + 2).$$

Метод підстановки (метод Бернуллі).

За цим методом розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (3) шукаємо у вигляді добутку двох невідомих диференційовних функцій:

$$y(x) = u(x)\, v(x).$$

Вираз для однієї з функцій u, v вибираємо з міркувань зручності, а другу - так, щоб добуток uv був розв'язком рівняння (3) .

Доцільно вибрати так одну з введених функцій, наприклад, функцію u, щоб вона була частинним розв'язком однорідного рівняння, відповідного заданому неоднорідному.

Тоді

$$u' + P(x)u = 0, \quad \frac{du}{u} = -P(x)dx, \quad u(x) = Ce^{-\int P(x)dx}, (C \neq 0); \quad \text{візьмемо } C = 1.$$

Підставимо функцію $y = uv$ в рівняння (3):

$$v'u + v\,u' + uv\,P(x) = v'u + v\underbrace{(u' + P(x)u)} = Q(x).$$

Сума виділених доданків рівна нулю внаслідок вибору функції $u(x)$.

Тому для визначення функції $v(x)$ маємо рівняння:

$$v'u = Q(x); \quad \frac{dv}{dx} = \frac{Q(x)}{u}; \quad dv = \frac{Q(x)}{u}dx; \quad \Rightarrow v(x) = \int \frac{Q(x)}{u(x)}dx + C.$$

Отже, загальним розв'язком рівняння (3) є функція

$$y(x) = u(x)v(x) = Cu(x) + u(x)\int \frac{Q(x)}{u(x)}dx, \quad C - \text{довільна стала.}$$

Звідси випливає

Теорема (про структуру загального розв'язку диференціального рівняння):

Загальний розв'язок $y(x)$ лінійного неоднорідного диференціального рівняння (3) складається з загального розв'язку відповідного йому лінійного однорідного диференціального рівняння (4), та частинного розв'язку лінійного неоднорідного рівняння :

$$y(x) = \overline{y}(x) + y^*(x); \quad \overline{y}(x) = Cu(x) = Ce^{-\int P(x)dx}, \quad y^*(x) = u(x)\int \frac{Q(x)}{u(x)}dx,$$

причому функція $y^*(x)$ є частинним розв'язком неоднорідного рівняння

$$y' + P(x)\,y = Q(x),$$

а функція $\overline{y}(x)$ - загальним розв'язком відповідного йому однорідного рівняння

$$y' + P(x) = 0.$$

Приклад 2. Розв'язати диференціальне рівняння $y' + 2y/x = -x^4$.

Використаємо метод підстановки:

$$y = uv, \quad y' = u'v + uv'; \quad u'v + uv' + \frac{2uv}{x} = u'v + u(v' + \frac{2v}{x}) - x^4.$$

Функцію v знайдемо з умови

$$v' + \frac{2v}{x} = 0; \quad \frac{dv}{v} = -\frac{2dx}{x}; \quad \ln|v| = -2\ln|x| + \ln C_1, \quad C_1 > 0.$$

$$\text{Звідси} \quad v = \frac{C_2}{x^2}, \quad C_2 \neq 0; \quad \text{візьмемо } C_2 = 1.$$

Тоді $v = \frac{1}{x^2}$. Для знаходження функції u маємо: $vu' = -x^4$;

$$\frac{du}{dx}\frac{1}{x^2} = -x^4; \quad du = -x^6dx \Rightarrow u = -\frac{x^7}{7} + C, \quad C - \text{довільна стала.}$$

Отже, загальним розв'язком заданого рівняння є функція

$$y = uv = (-\frac{x^7}{7} + C)\frac{1}{x^2} = \frac{C}{x^2} - \frac{x^5}{7}.$$

Рівняння Бернуллі

До цього типу належать диференціальні рівняння 1 - го порядку наступного виду:

$$y' + yP(x) = Q(x)\,y^{\alpha}, \quad \alpha \neq 0;\ \ \alpha \neq 1.$$

За допомогою підстановки $z = y^{1-\alpha}$ це рівняння зводиться до лінійного неоднорідного диференціального рівняння

$$z' + (1-\alpha)P(x)z = (1-\alpha)Q(x),$$

і може бути розв'язане одним з наведених вище способів.

Рівняння Бернуллі можна також розв'язати без попереднього переходу до функції $z = y^{1-\alpha}$, одразу використовуючи підстановку $y = uv$,
де $u = u(x), v = v(x)$ - диференційовні функції, і вибираючи одну з функцій (u або v), як розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$y' + yP(x) = 0.$$

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння Бернуллі

$$y' + \frac{y}{x+1} = -y^2.$$

Підставимо $y = u(x)v(x)$:

$$y' = u'v + uv'; \quad u'v + \underbrace{uv' + \frac{uv}{x+1}} = (uv)^2.$$

Одну з функцій, наприклад, функцію $v(x)$, виберемо так, щоб вона була розв'язком однорідного рівняння, відповідного заданому рівнянню Бернуллі. Тоді

$$v' + \frac{v}{x+1} = 0; \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x+1}; \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x+1}.$$

Звідси $\ln|v| = -\ln|x+1| + \ln C_1, \quad C_1 > 0; \quad v = \dfrac{C_2}{x+1}, \quad C_2 \neq 0.$

Приймаємо $C_2 = 1, \quad v(x) = \frac{1}{x+1}.$

Враховуючи, що сума виділених вище доданків рівна нулю, для знаходження функції $u(x)$ маємо:

$$u'v = (uv)^2; \quad \frac{du}{dx}\cdot\frac{1}{x+1} = \frac{u^2}{(x+1)^2}; \quad u^{-2}du = \frac{dx}{x+1} \Rightarrow -\frac{1}{u} = \ln|x+1| + \ln C, \quad (C > 0).$$

$$u(x) = -\frac{1}{\ln\left(C|x+1|\right)}.$$

Отже, розвязком заданого рівняння є функція

$$y(x) = u(x)\,v(x) = -\frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{\ln\left(C|x+1|\right)},.$$

Лекція 4. **Рівняння у повних диференціалах.**

Всяке диференціальне рівняння 1-го порядку можна записати наступним чином:

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0. \tag{6}$$

Якщо існує така функція двох змінних $Z(x,y)$, що ліва частина цього рівняння являє собою її повний диференціал, тобто

$$dZ = P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \frac{\partial Z}{\partial x}dx + \frac{\partial Z}{\partial y}dy,$$

то рівняння (6) називається ***рівнянням в повних диференціалах***. При цьому функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ є частинними похідними функції $Z(x,y)$:

$$P(x,y) = \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad Q(x,y) = \frac{\partial Z}{\partial y}.$$

Рівняння (6) в такому випадку виражає умову рівності нулю повного диференціала функції $Z(x,y)$, що означає, що в деяких точках $(x, y(x))$ її значення сталі :

$$d(Z(x,y(x)) = 0 \Rightarrow Z(x,y) = C.$$

Останній вираз є загальним інтегралом рівняння (6). Отже, якщо задане диференціальне рівняння має вигляд (6), а його ліва частина є повним диференціалом, то виконавши дію, зворотню до диференціювання, можна знайти його розв'язок .

Однак спочатку необхідно перевірити, чи дійсно заданий вираз $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ є повним диференціалом деякої функції. Це можна зробити, використавши умову рівності мішаних похідних 2-го порядку, які відрізняються лише порядком диференціювання :

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 Z}{\partial y\,\partial x}. \tag{7}$$

Рівність (7) тотожна рівності

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{8}$$

Якщо рівність (7) має місце, то розв'язування рівняння (6) можна виконати наступним способом.

Для знаходження функці $Z(x,y)$ використаємо той факт, що $P(x,y) = \frac{\partial Z}{\partial x}$.

Функцію знаходимо, "обернувши"диференціювання за змінною x:

$$Z(x,y) = \int \frac{\partial Z}{\partial x}dx = \int P(x,y)dx + \varphi(y). \tag{9}$$

В якості сталої інтегрування тут слід додати довільну функцію, залежну лише від змінної y.

Для визначення функції $\varphi(y)$ використаємо рівність $\frac{\partial Z}{\partial y} = Q(x,y)$, а також те, що вираз для $Q(x,y)$ заданий. Диференціюючи за змінною y знайдений вище вираз (9) для функції $Z(x,y)$, одержимо

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\int P(x,y)dx + \varphi(y)) = \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx + \varphi'(y) = Q(x,y).$$

Далі з останньої рівності знаходимо $\varphi'(y)$, а також $\varphi(y) = \int \varphi'(y)dy + C$. Підставивши знайдений для $\varphi(y)$ вираз в (9), одержимо загальний інтеграл рівняння.

Діючи аналогічно, знаходження загального інтеграла рівняння в повних диференціалах (6) можна виконати, "відновлюючи" функцію $Z(x,y)$ шляхом інтегрування за змінною y функції $Q(x,y) = \frac{\partial Z}{\partial y}$:

$$Z(x,y) = \int \frac{\partial Z}{\partial y} dy = \int Q(x,y)dy + \psi(x).$$

В якості сталої інтегрування при цьому слід додати довільну функцію $\psi(x)$, залежну лише від змінної x. Для знаходження функції $\psi(x)$ слід використати умову

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\int Q(x,y)dy + \psi(x)) = \frac{\partial}{\partial x}\int q(x,y)dy + \psi'(x) = P(x,y).$$

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$(\frac{1}{y^2} + xy^2 + 1)dx + (2\,cos(2y+1) - \frac{2x}{y^3} + x^2y)dy = 0.$$

Перевіримо, чи є дане рівняння рівнянням в повних диференціалах. Позначимо

$$P(x,y) = \frac{1}{y^2} + xy^2 + 1; \quad Q(x,y) = 2\,cos(2y+1) - \frac{2x}{y^3} + x^2y.$$

Знаходимо

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{y^2} + xy^2 + 1) = -\frac{2}{y^3} + 2xy; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2\,cos(2y+1) - \frac{2x}{y^3} + x^2y) = -\frac{2}{y^3} + 2xy.$$

Бачимо, що $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, отже, задане рівняння є рівнянням в повних диференціалах, і його ліва частина містить повний диференціал деякої функції $Z(x,y)$. Знайдемо цю функцію, а разом з тим і загальний інтеграл заданого рівняння, використовуючи вираз

$$Z(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y) = \int(\frac{1}{y^2} + xy^2 + 1)dx + \varphi(y) = \frac{x}{y} + \frac{x^2y^2}{2} + x + \varphi(y).$$

Функцію $\varphi(y)$ знайдемо з умови

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = Q(x,y) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(\frac{x}{y} + \frac{x^2y^2}{2} + x + \varphi(y)) = -\frac{2x}{y^3} + yx^2 + \varphi'(y) =$$

$$= Q(x,y) = 2\,cos(2y+1) - \frac{2x}{y^3} + x^2y.$$

Звідси

$$\varphi'(y) = 2cos(2y+1), \quad \varphi(y) = \int \varphi'(y)dy = 2\int(cos(2y+1)dy = sin(2y+1) + C_1.$$

Загальним інтегралом заданого рівняння є вираз $Z(x,y) = C$, або

$$\frac{x}{y} + \frac{x^2y^2}{2} + x + sin(2y+1) = C.$$

Інтегруючий множник

В деяких випадках диференціальне рівняння першого порядку

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0,$$

яке не є рівнянням в повних диференцвалах, вдається звести до такого типу, домноживши його на деяку неперервну функцію $\mu(x,y)$, що називається ***інтегруючим множником***. Розв'язок одержаного рівняння

$$\mu(x,y)P(x,y)\,dx + \mu(x,y)Q(x,y)\,dy = 0, \tag{10}$$

є розв'язком і вихідного рівняння. Отже, щоб розв'язати диференціальне рівняння 1-го порядку за методикою, застосовною до рівнянь в повних диференціалах, потрібно знайти інтегруючий множник . Це не завжди можливо. Отже, спочатку потрібно встановити, чи інтегруючий множник заданого рівняння існує. Покажемо, як можна знайти відповідь на це питання.

Оскільки рівняння (10) внаслідок домноження на $\mu(x,y)$ є рівнянням в повних диференціалах, то повинна мати місце рівність

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}; \quad \text{або} \quad P\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial P}{\partial y} = Q\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Звідси
$$P\frac{\partial \mu}{\partial y} - Q\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right). \tag{11}$$

Вираз (11) є диференціальним рівняння в частинних похідних, розв'язком якого є шукана функція $\mu(x,y)$. В загальному випадку розв'язування цього рівняння є задачею не меншої складності, ніж розв'язування вихідного рівняння. Однак в двох випадках функція $\mu(x,y)$ може бути знайдена шляхом порівняно нескладних обчислень. Розглянемо ці випадки.

а). Функція $\mu(x,y)$залежить лише від змінної x.

Тоді $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$, тому з (11) одержуємо

$$-Q\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right); \quad \frac{\partial \mu}{\mu} = -\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\partial x.$$

Очевидно, лише від x в цьому випадку повинен залежати і вираз $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$. Ця обставина і використовується для встановлення можливості знаходження інтегруючого множника $\mu(x,y)$ за допомогою останнього рівняння.

Отже, переконавшись, що вираз вираз $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$ не містить змінної y, і прирівнюючи первісні, з останнього рівняння одержуємо

$$\ln|\mu| = -\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx + \ln C; \quad \mu = e^{-\int \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx} \quad \text{(покладаємо C=1)}.$$

б). Функція $\mu(x,y)$ залежить лише ві змінної y.

Тоді $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$, а вираз $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$ повинен містити лише змінну y. Переконавшись в цьому, інтегруючий множник знаходимо за формулою

$$\mu = e^{\int \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dy}.$$

Приклад 2. Знайти інтегруючий множник диференціального рівняння $y\,dx - (x+y^2)\,dy = 0$, і звести його до рівняння в повних диференціалах.

Позначимо $P = y$; $Q = -(x+y^2)$. Маємо

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial Q}{\partial yx} = -1 \neq \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Отже, задане рівняння не є рівнянням в повних диференціалах. Дослідимо, чи можна за описаною вище схемою знайти інтегруючий множник - функцію $\mu(x,y)$. Для цього встановимо, від яких змінних залежить ця функція. Обчислимо

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{2}{x+y^2}\text{- залежить і від } x, \quad \text{і від } y;$$

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{2}{y} \text{ - залежить лише від } y.$$

Отже, маємо другий з наведених вище випадків. Тоді

$$\mu = e^{\int \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dy} = e^{-\int \frac{2}{y}dy} = e^{-2ln|y|} = y^{-2}.$$

Для зведення заданого рівняння до рівняння в повних диференціалах, домножимо його на $\mu = y^{-2}$. Одержимо:

$$\frac{dx}{y} - \left(\frac{x}{y^2} + 1\right)dy = 0. \quad \text{Позначимо} \quad P = \frac{1}{y}, \quad Q = -\left(\frac{x}{y^2} + 1\right).$$

$$\text{Тепер} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{1}{y^2}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y^2} + 1\right) = \frac{1}{y^2} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

отже, після домноження на інтегруючий множник $\mu = y^{-2}$ задане рівняння зводиться до рівняння в повних диференціалах. Його можна розв'язувати за наведеною методикою.

Лекція 5. **Диференціальні рівняння вищих порядків.**

В загальному випадку диференціальне рівняння порядку n можна записати у вигляді

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0. \tag{12}$$

Диференціальне рівняння називається ***лінійним*** , якщо воно містить шукану функцію і її похідні лише в першому степені, тобто лінійно:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x). \tag{13}$$

Розглядаючи ліву частину цього рівняння, як результат дії деякого лінійного диференціального оператора L_n на функцію $y(x)$ (дія полягає в знаходженні похідних до порядку n включно, домноженні їх на відповідні коефіцієнти $a_k(x)$, і знаходженні суми цих добутків), запишемо рівняння (12) у наступному вигляді:

$$L_n[y] = f(x). \tag{14}$$

Для рівняння (13), (14) справедливим є ***принцип суперпозиції***:

частинний розв'язок рівняння

$$L_n[y] = f_1(x) + f_2(x) \tag{15}$$

є сумою функцій $y_1^*(x)$ та $y_1^*(x)$, що є частинними розв'язками рівнянь

$$L_n[y] = f_1(x) \quad \text{та} \quad L_n[y] = f_2(x) \quad \text{відповідно.} \tag{16}$$

Оператор L_n має властивості ***однорідності***: $L_n[Cy] = CL_n[y]$, та ***адитивності*** : $L_n[y_1 + y_2] = L_n[y_1] + L_n[y_2]$.

Якщо $f(x) \equiv 0$, то диференціальне рівняння має вигляд $L_n[y] = 0$, і називається ***лінійним однорідним диференціальним рівнянням***.

Теорема 1. Якщо $a_1(x), ..., a_n(x), f(x)-$ - неперервні на проміжку $[a;b]$ функції, то для будь-якого $x \in (a;b)$, і будь-яких початкових умов $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, y''(x_0) = y''_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ існує розв'язок $y = y(x)$ рівняння (13), який задовольняє ці початкові умови.

Теорема 2. Якщо функції $y_1(x), y_2(x), ..., y_m(x)$ є розв'язками лінійного однорідного диференціального рівняння $L_n[y] = 0$, то його розв'язком є і довільна лінійна комбінація $\sum_{k=1}^{m} C_k y_k(x)$ цих функцій:

$$L[C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + ... + C_my_m(x)] = 0.$$

Означення 1. Система функцій $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$, серед яких немає тотожно рівних нулю, називається ***лінійно незалежною на проміжку*** $[a;b]$, якщо жодну з них на цьому проміжку не можна подати, як лінійну комбінацію інших.

Критерієм лінійної залежності системи функцій є рівність нулю визначника , що називається Вронскіаном :

$$R = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Нехай функції $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ і їх похідні до $n-1$-го порядку включно неперервні на $(a;b)$. Тоді їх Вронскіан при $a < x < b$ рівний нулю, якщо ці функції лінійно залежні, і не рівний нулю, якщо вони лінійно незалежні.

Означення 2. Система n лінійно незалежних розв'язків $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ лінійного однорідного диференціального рівняння називається ***фундаментальною системою розв'язків*** цього рівняння.

Теорема 3. Нехай функції $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ складають фундаментальну систему розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння. Тоді його ***загальним*** розв'язком є лінійна комбінація цих функцій

$$\overline{y}(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x). \tag{17}$$

Теорема 4. Загальний розв'язок $y(x)$ лінійного неоднорідного рівняння (13) є сумою його довільного частинного розв'язку $y^*(x)$ та загального розв'язку відповідного однорідного рівняння $\overline{y}(x)$:

$$y(x) = y^*(x) + \overline{y}(x).$$

Лекція 6. Диференціальні рівняння, які допускають пониження порядку.

1. Рівняння виду $y^{(n)} = f(x)$ (права частина не залежить від функції $y(x)$ і її похідних) .

Порядок цього рівняння можна послідовно понижувати шляхом інтегрування обох його частин. Оскільки

$$y^{(n)} = \frac{d(y^{(n-1)})}{dx} = f(x), \quad d(y^{(n-1)}) = f(x)dx, \quad \text{то} \quad y^{(n-1)} = \int f(x)dx + \widetilde{C}_1.$$

Аналогічно $d(y^{(n-2)}) = y^{(n-1)}dx$,

$$y^{(n-2)} = \int y^{(n-1)}dx + \widetilde{C}_2 = \int \left(\int \left(f(x) + \widetilde{C}_1\right) dx\right) dx + \widetilde{C}_1 x + \widetilde{C}_2, \ldots,$$

$$y = \underbrace{\int \ldots \int}_{n} f(x) \underbrace{dx \cdots dx}_{n} + \widetilde{C}_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \widetilde{C}_2 \frac{x^{(n-2)}}{(n-2)!} + \cdots + \widetilde{C}_n;$$

$$\text{або} \quad y = \underbrace{\int \ldots \int}_{n} f(x) \underbrace{dx \cdots dx}_{n} + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{(n-2)} + \cdots + C_n.$$

Приклад 1. Розв'язати диференціальне рівняння $y^{IV} = \frac{1}{x^5} + sinx$.

Інтегруючи обидві частини цього рівняння, послідовно знаходимо :

$$y^{III} = \int \left(\frac{1}{x^5} + sinx\right) dx = -\frac{1}{5x^4} - cosx + \widetilde{C}_1,$$

$$y^{II} = \int \left(-\frac{1}{5x^4} - cosx + \widetilde{C}_1\right) dx = \frac{1}{4 \cdot 5x^3} - sinx + \widetilde{C}_1 x + \widetilde{C}_2,$$

$$y^{I} = \int \left(\frac{1}{4 \cdot 5x^3} - sinx + \widetilde{C}_1 x + \widetilde{C}_2\right) dx = -\frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5x^2} + cosx + \frac{\widetilde{C}_1 x^2}{2} + \widetilde{C}_2 x + \widetilde{C}_3,$$

$$y = \int \left(-\frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5x^2} + cosx + \frac{\widetilde{C}_1 x^2}{2} + \widetilde{C}_2 x + \widetilde{C}_3\right) dx = -\frac{1}{5!x} + sinx + \frac{\widetilde{C}_1 x^3}{3!} + \frac{\widetilde{C}_2 x^2}{2!} + \widetilde{C}_3 x + \widetilde{C}_4,$$

або $y = -\dfrac{1}{5!x} + sinx + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4$, де $C_1 = \dfrac{\widetilde{C}_1}{3!}, C_2 = \dfrac{\widetilde{C}_2}{2!}, C_3 = \widetilde{C}_3, C_4 = \widetilde{C}_4$ - довільні сталі.

2. Рівняння виду $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0$ (права частина не залежить від функції $y(x)$ та її похідних $y', ..., y^{(k-1)}$) .

В цьому випадку порядок рівняння можна понизити шляхом введення замість присутньої в рівнянні похідної найнижчого порядку $y^{(k)}$ нової функції $u(x) = y^{(k)}$. Тоді $u' = y^{(k+1)}$, $u'' = y^{(k+2)}$, $u^{(n-k)} = y^{(n)}$. Вихідне рівняння зводиться до рівняння порядку $n-k$ для функції $u(x)$. Розв'язавши його, знайдемо
$u(x) = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C^{n-k}) = y^{(k)}$. Одержаний вираз являє собою рівняння типу, розглянутого вище. Виконавши його $k-$кратне інтегрування, знайдемо розв'язок вихідного рівняння.

Зауваження. У випадку задачі Коші для рівняннь вищих порядків значення сталих $C_1, C_2, ...$ доцільно знаходити по мірі їх появи після кожного інтегрування.

Приклад 2. Знайти розв'язок задачі Коші

$$y'''(x^2+1) - 2xy'' = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4, \quad y''(0) = 12.$$

Рівняння не містить функції y та похідної y'. Заміною $u = y''$ дане рівняння зводимо до рівняння 1-го порядку:

$$u'(x^2+1) - 2xu = 0; \quad \frac{du}{u} = \frac{2x\,dx}{x^2+1}; \quad ln|u| = ln|x^2+1| + ln\,C_1; \quad u = C_1(x^2+1).$$

З умови $y''(0) = u(0) = 12$ знаходимо $C_1 = 12$.
Тепер маємо $y'' = u = 12(x^2+1)$, $y' = \int y''dx = 4x^3 + 12x + C_2$.
З умови $y'(0) = 4$ одержуємо $C_2 = 4$, $y' = 4x^3 + 12x + 4$,

$$y = x^4 + 6x^2 + 4x + C_3; \quad y(0) = 1 \Rightarrow C_3 = 1.$$

Одержуємо розв'язок заданої задачі Коші : $y = x^4 + 6x^2 + 4x + 1$.

3. Рівняння другого порядку виду $F(y, y', y'') = 0$
(функція F не містить змінної x явно).

Порядок цього рівняння може бути понижений на одиницю заміною
$y' = u(y)$. Тоді

$$y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy}u.$$

Приклад 3. Знайти розв'язок задачі Коші

$$2y'' = e^y; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Введемо $y' = u(y)$, тоді $y'' = u\frac{du}{dy}$.
Підставивши ці вирази в задане рівняння, одержуємо

$$2u\frac{du}{dy} = e^y, \quad 2u\,du = e^y dy, \quad \text{звідси} \quad u^2 = e^y + C_1.$$

З умови $y'(0) = u(0) = 1$ маємо $C_1 = 0$. Тоді $u = e^{\frac{y}{2}} = y'$, $e^{-\frac{y}{2}}dy = dx$;

$$-2e^{-\frac{y}{2}} = x + C_2, \quad y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = -2, \quad -\frac{y}{2} = \ln\left(\frac{2-x}{2}\right).$$

Отже, розв'язком задачі є функція $\quad y=-2\ln\left(\frac{2-x}{2}\right)=\ln\frac{4}{(2-x)^2}$.

4. Рівняння $\quad F(x,y,y',y'',...,y^{(n)})=0, \quad$ **де функція** F **- однорідна відносно** $y,y',y'',...,y^{(n)}$ (не змінюється при одночасній заміні $\quad y,y',y'',...,y^{(n)}$ на $\quad ay,ay',ay'',...,ay^{(n)}, \quad a\neq 0$).

В цьому випадку порядок рівняння можна понизити на одиницю заміною $y'=y\cdot z(x)$; $\quad$ тоді $\quad y''=y'z+z'y=y(z^2+z')$.

Приклад 4. Знайти розв'язок задачі Коші

$$yy''=2x(y')^2; \quad y(2)=2, \quad y'(2)=0.5.$$

Очевидно, що дане рівняння належить до вказаного типу. Підставимо $y'=y\,z, \qquad y''=y'z+z'y=y(z^2+z')$.
Одержимо $\qquad y^2(z^2+z')=2xy^2z^2$.

Звідси, враховуючи, що $\quad y\equiv 0 \quad$ не може бути розв'язком даної задачі Коші (не задовольняє початкові умови), маємо

$$z'=\frac{dz}{dx}=z^2(2x-1).$$

Звідси

$$-\frac{1}{z}=x^2-x+C_1, \quad -\frac{y}{y'}=x^2-x+C_1.$$

Використовуючи початкові умови, знаходимо $\quad C_1=-6. \quad$ Тоді

$$\frac{y'}{y}=-\frac{1}{x^2-x-6}=-\frac{1}{(x-3)(x+2)},$$

$$\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{(x-3)(x+2)}; \quad \text{звідси} \quad -\ln|y|=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{C_2(3-x)}{x+2}\right|, \quad C_2>0,$$

$$\frac{1}{y^5}=-\frac{C_3(3-x)}{x+2}, \quad C_3\neq 0. \quad \text{З умови} \quad y(2)=2 \quad \text{знаходимо} \quad C_3=\frac{1}{8}.$$

Розв'язок задачі можна записати у наступній формі:

$$y^5(3-x)=8(x+2).$$

Лекція 7. Лінійні однорідні диференціальні рівняння з постійними коефіцієнтами.

До цього типу належать рівняння

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_{n-1}y'+a_ny=0, \tag{18}$$

де $a_1,a_2,...,a_n$ - деякі дійсні числа. Для знаходження його загального розв'язку потрібно спочатку знайти фундаментальну систему розв'язків цього рівняння.

Фундаментальна система розв'язків рівняння порядку n складається з n лінійно незалежних функцій, кожна з яких є його частинним розв'язком. Шукаючи їх у вигляді показникових функцій:

$$y = e^{kx}, \tag{19}$$

потрібно встановити, при яких значеннях множника k функції (19) можуть бути розв'язками рівняння (18). Для цього знаходимо похідні

$$y' = ke^{kx}, y'' = k^2e^{kx}, ..., y^{(n)} = k^ne^{kx},$$

і підставляємо їх в рівняння (18). Одержимо

$$e^{kx}(k^n + a_1k^{n-1} + a^2k^{n-2} + ... + a_{n-1}k + a_n) = 0.$$

Умовою рівності нулю лівої частини цього виразу є рівність нулю дужки

$$k^n + a_1k^{n-1} + a^2k^{n-2} + ... + a_{n-1}k + a_n = 0. \tag{20}$$

З цієї умови, яка є алгебраїчним рівнянням, знаходимо шукані значення множників k. Рівняння (20) називається ***характеристичним рівнянням*** заданого диференціального рівняння (18).

Розв'язавши рівняння (20), знайдемо його корені $k_1, k_2, ..., k_n$. Серед цих коренів можуть бути дійсні і комплексні, прості і кратні.

При побудові фундаментальної системи розв'язків рівняння (18) слід враховувати наступні правила:
- простому (однократному) дійсному кореню k_i відповідає один частинний розв'язок

$$y_i(x) = e^{k_ix};$$

- дійсному кореню k_j кратності m відповідають m частинних розв'язків

$$y_{j1} = e^{k_jx}; \quad y_{j2} = x\,e^{k_jx}, \quad y_{j3} = x^2\,e^{k_jx}, \quad y_{j4} = x^3\,e^{k_jx}, ..., \quad y_{jm} = x^{m-1}\,e^{k_jx};$$

- парі простих комплексно спряжених коренів $k_s = \alpha_s \pm \beta_s i$ відповідають два частинних розв'язки

$$y_{s1} = e^{\alpha_sx}cos(\beta_sx), \quad y_{s2} = e^{\alpha_sx}sin(\beta_sx);$$

- парі комплексно спряжених коренів $k_q = \alpha_q \pm \beta_q i$ кратності p відповідають $2p$ частинних розв'язків

$$y_{q1} = e^{\alpha_qx}cos(\beta_qx), \quad y_{q2} = e^{\alpha_qx}sin(\beta x); \quad y_{q3} = xe^{\alpha_qx}cos(\beta_qx), \quad y_{q4} = xe^{\alpha_qx}sin(\beta x);$$

$$y_{q5} = x^2e^{\alpha_qx}cos(\beta_qx), \quad y_{q6} = x^2e^{\alpha_qx}sin(\beta x); ...$$

$$..., y_{q\ 2p-1} = x^{p-1}e^{\alpha_qx}cos(\beta_qx), \quad y_{q\ 2p} = x^pe^{\alpha_qx}sin(\beta x);$$

Загальний розв'язок рівняння (18) записуємо у вигляді лінійної комбінації його частинних розв'язків за формулою (17).

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y''' + y'' - 2y = 0.$$

Знайдемо фундаментальну систему розв'язків цього рівняння. Шукаючи частинні розв'язки у вигляді функцій $y = e^{kx}$, одержимо характеристичне рівняння

$$k^3 + k^2 - 2 = 0.$$

Для знаходження коренів перетворимо його ліву частину:

$$k^3+k^2-2 = k^3-1+k^2-1 = (k-1)(k^2+k+1)+(k-1)(k+1) = (k-1)(k^2+2k+2) = 0.$$

Рівняння має один дійсний і два комплексно спряжених корені:

$$k_1 = 1; \quad k_2 = 1 + i; \quad k_3 = 1 - i.$$

Цим кореням відповідають частинні розв'язки

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = e^x cos\, x, \quad y_3(x) = e^x sin\, x,$$

які складають фундаментальну систему розв'язків заданого рівняння.

Загальним його розв'язком є $\quad y(x) = \sum_{k=1}^{3} C_k y_k(x) = C_1 e^x + C_2 e^x cos\, x + C_3 e^x sin\, x.$

Лекція 8. Метод варіації довільних сталих для розв'язування лінійних неоднорідних диференціальних рівняння з постійними коефіцієнтами.

В загальному випадку такі рівняння можна записати у вигляді

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{21}$$

де $a_1, a_2, ..., a_n$ - дійсні числа, $f(x)$ - деяка функція, не рівна тотожно нулю.

Рівняння (21) при $f(x) \equiv 0$ стає однорідним. Нехай функції $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ складають фундаментальну систему розвя"язків цього однорідного рівняння. Загальним його розв'язком є функція

$$\overline{y}(x) = \sum_{k=1}^{n} \overline{C}_k y_k(x),$$

де $\overline{C}_1, \overline{C}_2, ..., \overline{C}_n$ - довільні сталі.

За даним методом частинний розв'язок рівняння (21) шукають у вигляді

$$y^*(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k(x), \tag{22}$$

який співпадає по формі з загальним розв'язком (17) однорідного рівняння, однак довільні сталі $\overline{C}_1, ..., \overline{C}_n$ тут замінено деякими функціями $C_1(x), ..., C_n(x)$, які необхідно підібрати так, щоб одержана функція $y^*(x)$ була розв'язком неоднорідного рівняння (21).

Для знаходження функцій $C_1(x), ..., C_n(x)$ використовують систему рівнянь відносно похідних $C_1'(x), ..., C_n'(x)$ цих функцій:

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 + ... + C_n'y_n = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' + ... + C_n'y_n' = 0, \\ C_1'y_1'' + C_2'y_2'' + ... + C_n'y_n'' = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + ... + C_n'y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \tag{23}$$

Система рівнянь (23) одержується при підстановці функції (22) та її похідних в рівняння (21), для визначеності при цьому накладаються додаткові умови, що виражаються першими $n-1$ рівняннями системи рівнянь (23).

Розв'язавши систему (23), знайдемо вирази для похідних $C_1'(x), ..., C_n'(x)$. Самі функції $C_1(x), ..., C_n(x)$ одержуємо інтегруванням :

$$C_k(x) = \int C_k'(x)dx \quad \text{(сталі інтегрування покладаємо рівними нулю).}$$

Загальний розв'язок рівняння (21) рівний сумі його частинного розв'язку (22) та загального розв'язку відповідного йому однорідного рівняння :

$$y(x) = \overline{y}(x) + y^*(x) = \sum_{k=1}^{n} \overline{C}_k y_k(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k(x)y_k(x).$$

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + y = cos\, x.$$

Знайдемо фундаментальну систему розв'язків однорідного рівняння $y'' + y = 0$, відповідного даному неоднорідному. Його характеристичне рівняння $k^2 + 1 = 0$ має комплексно спряжені корені $k_1 = i$, $k_2 = -i$. Отже, фундаментальна система розв'язків однорідного рівняння складається з двох функцій $y_1 = cos\, x$, $y_2 = sin\, x$. Загальний розв'язок однорідного рівняння рівний

$$\overline{y}(x) = \overline{C}_1 cos\, x + \overline{C}_2 sin\, x; \quad \overline{C}_1,\, \overline{C}_2 - \text{довільні сталі.}$$

Частинний розв'язок заданого неоднорідного рівняння записуємо у вигляді

$$y^*(x) = C_1(x)cos\, x + C_2(x)sin\, x; \quad \text{де } C_1(x),\, C_2(x) - \text{невідомі поки що функції.}$$

Для знаходження похідних $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ обчислюємо $y_1' = -sin\, x$, $y_2' = cos(x)$, і записуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1'(x)cos\, x + C_2'(x)sin\, x = 0, \\ -C_1'(x)sin\, x + C_2'(x)cos = cos\, x. \end{cases}$$

Розв'язками цієї системи є

$$C_1{}'(x) = -\frac{1}{2}\, sin\, 2x, \quad C_2,'(x) = cos^2 x.$$

Тоді

$$C_1(x) = \int C_1{}'(x)dx = \frac{1}{4}\, cos\, 2x, \quad C_2(x) = \int C_2'(x)dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\, sin\, 2x$$

(сталі інтегрування відкидаємо). Тепер можемо записати частинний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y^*(x) = \frac{1}{4} cos\, 2x\, cos\, x + \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} sin\, 2x\right) sin\, x.$$

Отже, загальним розв'язком заданого неоднорідного рівняння є функція

$$y(x) = \overline{y}(x) + y^*(x) = \overline{C}_1 cos\, x + \overline{C}_2 sin\, x + \frac{1}{4} cos\, 2x\, cos\, x + \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} sin\, 2x\right) sin\, x.$$

Лекція 9. Метод невизначених коефіцієнтів для розв'язування лінійних неоднорідних диференціальних рівняння з постійними коефіцієнтами.

В деяких випадках частинний розв'язок $y^*(x)$ неоднорідного диференціального рівняння (21) можна підібрати, виходячи з форми його правої частини - функції $f(x)$. Це можливо, якщо функція $f(x)$ за структурою відповідає виразу

$$e^{\alpha x} \left[P_k(x) cos\, \beta\, x + Q_m(x) sin\, \beta\, x\right], \tag{24}$$

де $P_k(x), Q_m(x) -$ многочлени степенів відповідно k та m.

При встановленні вигляду частинного розв'язку неоднорідного рівняння враховують також властивості лівої частини цього рівняння, а саме - властивості коренів характеристичного рівняння (20).

Знаходження частинного розв'язку рівняння (21) за методом невизначених коефіцієнтів здійснюється в два етапи:

- встановлюють його загальну будову - частинний розв'язок записують у вигляді деякої функції (вибір форми цієї функції описано нижче) з невизначеними коефіцієнтими ;

- підставивши цю функцію в рівняння (21), з умови рівності його правої і лівої частин знаходять значення всіх коефіцієнтів.

Доцільно керуватись наступними правилами підбору форми частинного розв'язку $y^*(x)$.

1) Якщо функція $f(x)$ містить множник $e^{\alpha x}$, то такий же множник містить частинний розв'язок $y^*(x)$.

2) Якщо функція $f(x)$ має множники $cos\beta x$ або $sin\beta x$, то функцію $y^*(x)$ слід шукати у вигляді ***двох*** доданків, в одному з яких присутній множник $cos\beta x$, в другому - $sin\beta x$.

3) Якщо функція $f(x)$ має множник

$$e^{\alpha x} \left(P_k(x) cos\, \beta\, x + Q_m(x) sin\, \beta\, x\right), \quad \text{де} \quad P_k(x), Q_m(x) -$$

многочлени степенів k та m, то до частинного розв'язку слід включити множник

$$e^{\alpha x} \left(P_l(x) cos\, \beta\, x + Q_l(x) sin\, \beta\, x\right), \quad \text{де} \quad R_l(x),\ S_l(x) -$$

многочлени степеня l; $l -$ більше серед чисел k, m.

Многочлени $R_l(x),\ S_l(x)$ при цьому слід записувати в загальній формі, включаючи всі степені змінної x від 0 до l:

$$R_l(x) = A_0x^l + A_1x^{l-1} + A_2x^{l-2} + ... + A_{l-1}x + A_l;$$

$$S_l(x) = B_0x^l + B_1x^{l-1} + B_2x^{l-2} + ... + B_{l-1}x + B_l;$$

тут $A_j, B_j, \quad j = 0, 1, ..., l, -$ невизначені коефіцієнти, значення яких далі треба знайти.

4) Якщо серед коренів характеристичного рівняння є корінь $k = \alpha \pm i\,\beta$ кратності r, а функція $f(x)$ має множники $e^{\alpha x}cos\beta x$ або $e^{\alpha x}sin\beta x$, то побудований за наведеними вище правилами частинний розв'язок слід домножити на x^r.

Зокрема, якщо права частина рівняння має вигляд $e^{\alpha x}P_m(x)$, а серед коренів
характеристичного рівняння є корінь $k = 0$ кратності r, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y^*(x) = x^r e^{\alpha x} R_m(x), \text{ де } R_m(x) \text{ - многочлен степеня } m.$$

Встановивши загальну форму функції $y^*(x)$, потрібно знайти її похідні $(y^*(x))'$, $(y^*(x))''$, $(y^*(x))'''$, ..., і підставити їх в рівняння (21). Далі утворити в лівій частині групи доданків, що містять однакові степені змінної x, однакові тригонометричні функції і т.д. (в правій частині залишається нуль), і прирівняти до нуля окремо кожну з цих груп. Одержимо систему рівнянь, в якій невідомими величинами є значення коефіцієнтів многочленів, і яка має єдиний розв'язок, якщо функціональна форма частинного розв'язку диференціального рівняння знайдена правильно.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y'' + 2y' = 2e^{3x}.$$

Спочатку знайдемо розв'язок однорідного рівняння:

$$y'' + 2y' = 0,$$

відповідного даному неоднорідному. Шукаючи частинні його розв'язки у вигляді показникових функцій $y = e^{kx}$, одержимо характаристичне рівняння

$$k^2 + 2k = 0, \quad \text{коренями якого є} \quad k_1 = 0, \quad k_2 = -2.$$

Частинними розв'язками однорідного рівняння є функції

$$y_1 = e^{k_1 x} \equiv e^0 = 1, \quad y_2 = e^{k_2 x} = e^{-2x},$$

а загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$\overline{y}(x) = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1 + C_2e^{-2x}.$$

Встановимо тепер функціональну форму розв'язку заданого неоднорідного рівняння. Порівнюючи його праву частину $2e^{3x}$ з виразом (24), встановлюємо наступну відповідність:

$$\alpha = 3; \quad \beta = 0; \quad P_k(x) \equiv 2, \ \Rightarrow k = 0. \quad \text{Отже,}$$

$$e^{\alpha x}\left(P_k(x)cos\,\beta\,x + Q_m(x)sin\,\beta\,x\right) \Rightarrow e^{3x}(P_k(x)cos(0x) + Q_m(x)sin(0x)) = e^{3x}\cdot 2.$$

Множник 2 в правій частині рівняння є многочленом нульового степеня. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння повинен містити Ae^{3x},
де A - загальна форма для многочлена степеня нуль (A=$const$).

Числа $\alpha \pm i\,\beta = 3 \pm i\cdot 0 = 3$ серед коренів характеристичного рівняння немає. Тому вираз Ae^{3x} не потрібно домножувати на x^r, (за наведеними правилами, r - кратність кореня, який співпадає з числом $\alpha \pm i\,\beta$).

Таким чином, частинний розв'язок неоднорідного рівняння слід шукати у вигляді

$$y^*(x) = Ae^{3x}, \quad \text{A - невизначений коефіцієнт.}$$

Для знаходження коефіцієнта A обчислюємо похідні
$y^{*'} = 3Ae^{3x}, \quad y^{*''} = 9Ae^{3x}$ і підставляємо їх в ліву частину заданого рівняння:

$$Ae^{3x} + 6Ae^{3x} = 2Ae^{3x}; \quad e^{3x}(9A + 6A - 2) = 0; \quad 15A = 2; \quad A = \frac{2}{15}.$$

Одержуємо

$$y^*(x) = \frac{2}{15}e^{3x};$$

$y(x) = \overline{y}(x) + y^*(x) = C_1 + C_2e^{-2x} + \dfrac{2}{15}e^{3x}$ – загальний розв'язок заданого рівняння.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння

$$y'' + 2y' + y = x^2e^{-x}.$$

Характеристичне рівняння $k^2 + 2k + 1 = 0$ відповідного однорідного рівняння має один двократний корінь $k = -1$.

Отже, частинними його розв'язками є функції $y_1 = e^{-x}, \quad y_2 = x\,e^{-x}$,

а загальним розв'язком $-\overline{y}(x) = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$.

Для вибору функціональної форми частинного розв'язку неоднорідного рівняння порівняємо його праву частину з виразом (24). Має місце наступна відповідність:

$$\alpha = -1, \quad \beta = 0, \quad P_k(x) = x^2 - \text{многочлен степеня} \quad \text{l=2}.$$

Отже, частинний розв'язок неоднорідного рівняння повинен містити множник

$$e^{\alpha x}\left(P_l(x)cos\,\beta\,x + Q_l(x)sin\,\beta\,x\right) \Rightarrow e^{-x}(P_2(x)cos(0x) + Q_2(x)sin(0x)) = e^{-x}P_2(x).$$

Многочлен другого степеня в загальному випадку записуємо
в формі $P_2(x) = Ax^2 + Bx + C; \quad A,\, B,\, C-$ невизначені коефіцієнти.

Обчислимо числа $\alpha + \pm i\,\beta = -1$, і порівняємо їх з коренями характеристичного рівняння. Бачимо, що ці числа співпадають з двократним коренем. Тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння буде містити множник x^2, і матиме наступний

$$\text{вигляд:} \quad y^*(x) = x^2e^{-x}(Ax^2 + Bx + C) = e^{-x}(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2).$$

Знайдемо значення коефіцієнтів A, B, C. Обчислимо похідні

$$y^{*'} = e^{-x}[-Ax^4 + (4A - B)x^3 + (3B - C)x^2 + 2Cx],$$

$$y^{*''} = e^{-x}[Ax^4 - (8A - B)x^3 + (12A -^{B} + C)x^2 + (6B - 4C)x + 2C]$$

Підставляємо ці вирази в задане неоднорідне рівняння. Одержимо:

$$e^{-x}(12Ax^2 + 6Bx + 2C) = x^2 e^{-x}; \quad e^{-x}[(12A - 1)x^2 + 6B + C] = 0;$$

$$\text{звідси} \quad C = 0, \quad B = 0; \quad A = \frac{1}{12}.$$

Отже, $\quad y^*(x) = \dfrac{1}{12}x^4 e^{-x} \quad$ є частинним, а $\quad y(x) = \overline{y}(x) + y^*(x) = C_1 + C_2 x + \dfrac{x^4}{12}$ - загальним розв'язками заданого неоднорідного рівняння.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння

$$y'' - 2y' + 5y = e^x(cos2x + x\,sin2x).$$

Знайдемо корені характеристичного рівняння $k^2 - 2k + 5 = 0$. Одержуємо $k_1 = 1 + 2i, \quad k_2 = 1 - 2i$. Тоді частинними розв'язками однорідного рівняння, відповідного заданому неоднорідному, є $\quad y_1 = e^x cos\,2x, \quad y_2 = e^x sin\,2x$.

Загальним розв'язком однорідного рівняння є функція

$$\overline{y}(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^x cos2x + C_2 e^x sin2x.$$

Порівнюючи праву частину заданого неоднорідного рівняння з виразом (24), встановлюємо наступну відповідність:

$$\alpha = 1; \quad \beta = 2; \quad P_k(x) \equiv 1, \Rightarrow\ k = 0; Q_m(x) = x, \Rightarrow, m = 1.$$

Тоді, відповідно до наведених вище правил, частинний розв'язок повинен містити

$$e^{\alpha x}[R_1(x) cos\,\beta x + S_1(x) sin\,\beta x] = e^x[(A + Bx) cos\,2x + (C + Dx) sin\,2x].$$

Множниками при $\ cos\,2x, sin\,2x$ є записані в загальній формі многочлени 1-го степеня $\ R_1(x) = A + Bx, \quad S_1(x) = C + Dx$. Їх степінь рівний більшому серед степенів многочленів $P_0(x) = 1; \quad Q_1(x) = x$.

Числа $\ \alpha \pm i\,\beta = 1 + 2i\ $ співпадають з коренями характеристичного рівняння кратності $\ r = 1$. Тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння повинен додатково мати множник $\ x^r = x$. Отже, частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо в формі

$$y^*(x) = x\,e^{\alpha x}[R_1(x) cos\,\beta x + S_1(x) sin\,\beta x] = e^x[(Ax + Bx^2) cos\,2x + (Cx + Dx^2) sin\,2x],$$

де $\ A, B, C, D$ -невизначені коефіцієнти. Для їх знаходження обчислимо похідні

$$y^{*'}(x) = e^x\{[(D-2B)x^2 + (2D+C-2A)x + C] sin\,2x + [(B+2D)x^2 + (2B+A+2C)x + A] cos\,2x\};$$

$$y^{*''}(x) = e^x\{[(-4B - 3D)x^2 + (4D - 8B - 4A + 3C)x + 2D + 2C - 4A] sin\,2x +$$
$$[(-3B + 4D)x^2 + (8D - 3A + 4C + 4B)x + 4C + 2B + 2A] cos\,2x\},$$

і підставимо їх та вираз для $\ y^*(x)\ $ в задане рівняння. Подібні члени зводимо за степенями $\ x\ $ окремо для синусів та косинусів. Одержимо

$$e^x\{[(-8B - 1)x + (2D - 4A)] sin\,2x + [8Dx + (4C + 2B - 1)] cos\,2x\} = 0.$$

В загальному випадку рівність нулю в цьому виразі має місце, якщо виконуються наступні умови:

$$\begin{cases} -8B - 1 = 0, \\ 2D - 4A = 0, \\ 8D = 0, \\ 4C + 2B - 1 - 0. \end{cases}$$

Сукупність цих умов є системою рівнянь, з якої знаходимо:

$$A = 0; \quad B = -\frac{1}{8}; \quad C = \frac{5}{16}; \quad D = 0.$$

Тепер можемо записати частинний

$$y^*(x) = x\,e^x[-\frac{1}{8}x^2 cos\,2x + \frac{5}{16} sin\,2x],$$

і загальний розв'язок заданого рівняння :

$$y(x) = \overline{y}(x) + y^*(x) = C_1 e^x cos2x + C_2 e^x sin2x + x\,e^x[-\frac{1}{8}x^2 cos\,2x + \frac{5}{16} sin\,2x].$$

Приклад 4. Знайти розв'язок задачі Коші

$$y'' - 9y = 3e^x + 2e^{2x}; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.05.$$

Коренями характеристичного рівняння $k^2 - 9 = 0$ є числа $k_1 = 3$, $k_2 = -3$. Отже, загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння, відповідного заданому неоднорідному, має вигляд

$$\overline{y}(x) = C_2 e^{3x} + C_2 e^{-3x}.$$

В правій частині заданого рівняння маємо суму функцій $f_1(x) = 3e^x$ і $f_2(x) = 2e^{2x}$. Згідно з принципом суперпозиції, його частинний розв'язок є сумою частинних розв'язків неоднорідних рівнянь

$$a) \quad y'' - 9y = f_1(x) = 3e^x,$$

та

$$b) \quad y'' - 9y = f_2(x) = 2e^{2x}.$$

Для першого з цих рівнянь маємо $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\alpha \pm i\beta = 1$, для другого $\alpha = 2$, $\beta = 0$, $\alpha \pm i\beta = 2$. Оскільки серед коренів характеристичного рівняння немає чисел 1 і 2, розв'язок рівняння $a)$ шукаємо у вигляді $y_1^*(x) = Ae^x$ а рівняння $b)$ - у вигляді $y_2^*(x) = Be^{2x}$.
Обчисливши похідні $y_1^{*''}(x) = Ae^x$, $y_2^{*''}(x) = 4Be^{2x}$, підставляємо їх відповідно в рівняння $a)$ та $b)$. Одержимо

$$a) \quad (A - 9A)e^x = -8Ae^x = 3e^x,$$

$$b) \quad (4B - 9B)e^{2x} = -5e^{2x} = 2e^{2x}.$$

Звідси $A = -3/8$, $B = -2/5$.
Отже, $y_1^*(x) = -3/8e^x$, $y_2^*(x) = -2/5e^{2x}$. Частинним розв'язком заданого неоднорідного диференціального рівняння є функція

$$y^*(x) = y_1^*(x) + y_2^*(x) = -3/8e^x - 2/5e^{2x},$$

а його загальним розв'язком -

$$y(x)=\overline{y}(x)+y^*(x)=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}+y_1^*(x)+y_2^*(x)=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}-3/8e^x-2/5e^{2x}.$$

Тепер знайдемо розв'язок задачі Коші, тобто частинний розв'язок, який відповідає заданим початковим умовам. Попередньо знаходимо

$$y'(x)=3C_1e^{3x}-3C_2e^{-3x}-\frac{3}{8}e^x-\frac{4}{5}e^{2x}.$$

При $x=0$ одержимо: $y(0)=0 \;\Rightarrow\; C_1+C_2-\frac{3}{8}-\frac{2}{5}=0;$

$$y'(0)=0.05 \;\Rightarrow\; 3C_1-3C_2-\frac{3}{8}-\frac{4}{5}=0.05.$$

Звідси маємо $C_1=1/2,\quad C_2=11/40$. Отже, розв'язком даної задачі є

функція $$y(x)=\frac{1}{2}\,e^{3x}+\frac{11}{40}\,e^{-3x}-3/8\,e^x-2/5\,e^{2x}.$$

Лекція 10. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків зі змінними коефіцієнтами.

Загального методу розв'язування таких рівнянь немає. Розглянемо деякі випадки, коли їх розв'язки можуть бути знайдені.

1. Розв'язування лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку, якщо відомий один його частинний розв'язок.

Розглянемо рівняння $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$.
Нехай відомий його частинний розв'язок $y_1(x)$, тоді загальний розв'язок шукаємо у вигляді $y=uy_1,\ y'=u'y_1+uy_1',\quad y''=u''y_1+2u'y_1'+uy_1''$:

$$u''y_1+2u'y_1'+uy_1''+a_1(x)(u'y_1+uy_1')+a_2(x)uy_1=0,$$

$$y_1u''+[2y_1'+a_1(x)y_1]u'+u[y_1{}''+a_1(x)y_1{}'+a_2(x)y_1]=0,$$

$$y_1u''+[2y_1'+a_1(x)y_1]u'=0.$$

Одержуємо рівняння для функції u, яке можна розв'язати , звівши його до рівняння першого порядку заміною $u'=z$.

Цей спосіб пониження порядку можна використати і для лінійних однорідних диференціальних рівнянь вищих порядків.

Більш зручним у випадку рівняння $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$ є використання формули Остроградського - Ліувілля:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix}=Ce^{-\int a_1(x)\,dx},$$

Тут C - довільна стала, y - загальний розв'язок рівняння.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''+4xy'+(4+2)y=0$, якщо одним з його частинних розв'язків є функція $y_1=e^{-x^2}$.

1) Перший спосіб.
Загальний розв'язок шукаємо у вигляді добутку $y = uy_1 = ue^{-x^2}$.
Тоді $y' = (u' - 2xu)e^{-x^2}$, $y'' = e^{-x^2}[u'' - 4xu' + (4x^2 - 2)u]$.
Підставивши це в задане рівняння, одержимо $e^{-x^2}u'' = 0$.
Звідси $u'' = 0$, $u' = C_1$, $u = C_1x + C_2$.
Загальним розв'язком є функція $y = (C_1x + C_2)e^{-x^2}$.

2) Другий спосіб.
Запишемо формулу Остроградського - Ліувілля:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = C_1e^{-\int a_1(x)\,dx} = C_1e^{-\int 4x\,dx} = C_1e^{-2x^2},$$

Розкриваємо визначник і підставляємо $y_1' = -2xe^{-x^2}$:

$$y_1y' - yy_1' = e^{-x^2}(y' + 2xy) = C_1e^{-2x^2}, \qquad y' + 2xy = C_1e^{-x^2}.$$

Розв'яжемо це лінійне рівняння за допомогою підстановки $y = uv$.
Тоді $u'v + \underbrace{uv' + 2xuv} = C_1e^{-x^2}$.
Функцію v знайдемо з умови $uv' + 2xuv = 0$. Звідси
$v' + 2xv = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -2x\,dx$, $\ln|v| = -x^2$; приймаємо $v = e^{-x^2}$.
Для визначення функції u маємо $u'v = u'e^{-x^2} = C_1e^{-x^2}$.
Одержуємо $u' = C_1$, $u = C_1x + C_2$. Отже, $y = uv = (C_1x + C_2)e^{-x^2}$.

2. Диференціальні рівняння, що зводяться до лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Існування можливості зведення рівняння (13)

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + ... + a_{n-1}(x)y\,' + a_n(x)y = f(x)$$

до лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами залежить від властивостей коефіцієнтів $a_1(x), a_2(x), ..., a_n(x)$. Можна довести, що якщо таке зведення можливе, то лише шляхом переходу до нової незалежної змінної (наприклад, $t = \varphi(x)$)

за формулою $t = C\int (a_n(x))^{1/n}\,dx$, тут C - довільна стала.

Зауважимо, що використання знайденої так змінної **не гарантує** того, що з її допомогою рівняння (13) буде зведене до рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Розглянемо ***рівняння Ейлера***

$$x^ny^{(n)} + p_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + p_ny = 0 \quad (x \neq 0), \tag{25}$$

де $p_1, \ldots, p_n$ - сталі множники. Порівнюючи рівняння (13) та (25), знаходимо

$$a_n(x) = p_nx^{-n}, \qquad \text{тому} \quad t = C\int \left(\frac{p_n}{x^n}\right)^{1/n} dx.$$

Покладаючи $C\,(p_n)^{\frac{1}{n}} = 1$ і опускаючи сталу інтегрування, дістанемо

$t = \ln|x|: \quad x = e^t \quad$ при $\quad x > 0; \quad x = -e^t \quad$ при $\quad x < 0.$

Далі в рівнянні (25) слід перейти до змінної t, враховуючи, що

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{dt}\frac{dt}{dx}.$$

Після підстановки похідних рівняння Ейлера зводиться до рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Зручно використовувати також наступний спосіб розв'язування рівняння Ейлера.

Будемо шукати його частинні розв'язки у вигляді степеневої функції $\quad y = x^r, \quad$ де показник $\quad r \quad$ підлягає визначенню. Підставивши цей вираз в рівняння (25), після скорочення на $\quad y = x^r$ одержимо алгебраїчне рівняння степеня n, коренями якого є n можливих значень показника r.

При побудові загального розв'язку слід враховувати наступні правила:

- простому дійсному кореню $\quad r_j \quad$ відповідає частинний розв'язок

$$y_j = x^{r_j};$$

- m - кратному кореню r_j відповідає m частинних розв'язків $y_{j1} = x^{r_j}, \quad y_{j2} = x^{r_j}\ln x, \quad y_{j3} = x^{r_j}(\ln x)^2 ..., y_{j\,m} = x^{r_j}(\ln x)^{(m-1)};$

- парі простих комплексно спряжених коренів $\quad r_k = \alpha \pm i\beta \quad$ відповідають частинні розв'язки $y_{k1} = x^{\alpha} cos\left(\beta \ln x\right), \quad y_{k2} = x^{\alpha} sin\left(\beta \ln x\right),$

- загальним розв'язком рівняння є сума його частинних розв'язків, домножених на довільні сталі.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння Ейлера $x^2y'' + xy' - y = 0.$

Частинні розв'язки рівняння шукаємо у вигляді $\quad y = x^r.$
Знайдемо похідні $\quad y' = rx^{r-1}, \quad y'' = r(r-1)x^{r-2}$. Підставивши їх в задане рівняння, одержуємо

$$x^2r(r-1)x^{r-2} + xrx^{r-1} - x^r = x^r(r^2-1) = 0.$$

Скоротивши на $\quad x^r$, маємо рівняння $\quad r^2 - 1 = 0$. Його коренями є числа $r_1 = 1, \quad r_2 = -1$, а частинними розв'язками заданого рівняння - функції $y_1 = x, \quad y_2 = x^{-1}$. Отже, загальним розв'язком є функція

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1x + C_2x^{-1}.$$

Лекція 11. Системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку.

Система рівнянь виду

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \tag{26}$$

називається ***системою диференціальних рівнянь першого порядку***.

Форма системи диференціальних рівнянь, при якій функції в правій частині не містять похідних, називається ***нормальною***.

Система (26) називається ***автономною***, якщо функції $f_1, f_2, ..., f_n$ в правій частині не залежать від змінної x ***явно***.

Якщо функції $f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), ..., f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ є лінійними відносно невідомих $y_1, y_2, ..., y_n$, то система рівнянь називається ***лінійною***. В цьому випадку вона має вигляд

$$\begin{cases} y_1' = a_{1\,1}(x)y_1 + a_{1\,2}(x)y_2 + ... + a_{1\,n}(x)y_n + \varphi_1(x), \\ y_2' = a_{2\,1}(x)y_1 + a_{2\,2}(x)y_2 + ... + a_{2\,n}(x)y_n + \varphi_2(x), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n' = a_{n\,1}(x)y_1 + a_{n\,2}(x)y_2 + ... + a_{n\,n}(x)y_n + \varphi_n(x), \end{cases} \tag{27}$$

При $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = ... = \varphi_n(x) \equiv 0$ маємо систему ***лінійних однорідних диференціальних рівнянь*** (**ЛОДР**).

Якщо ж всі коефіцієнти $a_{i\,j}(x)$ є сталими величинами, маємо систему ***лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами***

Розв'язком системи n диференціальних рівнянь є сукупність n функцій $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$, підстановка яких в систему рівнянь перетворює кожне з них в тотожність.

Загальним розв'язком називається сукупність n функцій $y_1(x, C_1, C_2, ..., C_n), y_2(x, C_1, C_2, ..., C_n)), ..., y_n(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, що залежать від аргумента x, і містять n сталих $C_1, C_2, ..., C_n$, яка при ***довільному*** наборі значень цих сталих є розв'язком системи.

Частинним розв'язком системи рівнянь називають сукупність n функцій, які одержуються з загального розв'язку, якщо сталим $C_1, C_2, ..., C_n$ надати деякі конкретні значення $C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0$.

Задачею Коші для системи диференціальних рівнянь називається задача про знаходження ***частинного*** розв'язку системи, який задовольняє задані при деякому значенні аргумента $x = x_0$ початкові умови. Для системи (26) початкові умови виражаються рівностями $y_1(x_0) = y_1^0$, $y_2(x_0) = y_2^0, ..., y_n(x_0) = y_n^0$, де $y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0$ - задані числа.

Зведення системи n лінійних диференціальних рівнянь першого порядку до одного рівняння вищого порядку (спосіб виключення змінних)

Систему n лінійних рівнянь першого порядку (27) можна звести до одного рівняння вищого порядку.

Для цього виберемо одне з рівнянь системи, наприклад перше, і продиференціюємо його ліву і праву частини:

$$y_1'' = a_{11}'y_1 + a_{12}'y_2 + \cdots + a_{1n}'y_n + a_{11}y_1' + a_{12}y_2' + \cdots + a_{1n}y_n' + \varphi_1'(x).$$

Підставимо в праву частину цього виразу значення похідних функцій y_k, $k = 1...n$, використовуючи інші рівняння системи (27). Одержимо вираз

$$y_1'' = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1n}y_n + \varphi_1'(x) = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1n}y_n + \psi_1(x).$$

Диференціюємо тепер одержаний вираз і знову підставляємо значення похідних. Повторивши цю процедуру всього $n-1$ разів і об"єднавши перше рівняння системи (27) і одержані вирази, одержимо:

$$\begin{cases} y_1' = a_{1\,1}(x)y_1 + a_{1\,2}(x)y_2 + ... + a_{1\,n}(x)y_n + \varphi_1(x), \\ y_1'' = b_{2\,1}(x)y_1 + b_{2\,2}(x)y_2 + ... + b_{2\,n}(x)y_n + \psi_2(x), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_1^{(n)} = b_{n\,1}(x)y_1 + b_{n\,2}(x)y_2 + ... + b_{n\,n}(x)y_n + \psi_n(x), \end{cases} \tag{28}$$

Візьмемо перші $n-1$ з цих рівнянь, і розглядаючи їх, як систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $y_2, y_3, \ldots, y_n$, розв'яжемо цю систему (за умови, що її визначник відмінний від нуля). Одержані розв'язки лінійно виражатимуть функції $y_2, y_3, \ldots, y_n$, через функцію y_1, її похідні $y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}$, та функції $\varphi_1(x), \psi_2(x), \ldots \psi_{(n-1)}(x)$.

Підставивши ці вирази в останнє рівняння системи (28), одержимо лінійне диференціальне рівняння порядку n для функції y_1:

$$y_1^{(n)} + c_1(x)y_1^{(n-1)} + c_2(x)y_1^{(n-2)} + \cdots + c_n(x)y_1 + \Psi(x) = 0,$$

розв'язавши яке, матимемо одну з компонент розв'язку системи рівнянь (28) - функцію $y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, де $C_1, C_2, ..., C_n$ - довільні сталі.

Для знаходження інших компонент її розв'язку - функцій $y_2, y_3, \ldots, y_n$ слід використати вирази для цих функцій, знайдені при побудові рівняння порядку n для функції y_1, підставивши в них значення функції y_1 та її похідних.

Якщо визначник системи (28) рівний нулю, то вона зводиться до диференціального рівняння нижчого порядку, ніж n, для функції y_1. При цьому, виконавши аналогічну описаній вище процедуру для іншого рівняння системи (27) (другого, третього і т. д.), її, можливо, вдасться звести до рівняння порядку n для одної з функцій $y_2, y_3, \ldots, y_n$.

Очевидно, що цей метод можна використати і для розв'язування систем лінійних ***однорідних*** диференціальних рівнянь першого порядку. Практично він є зручним у випадку невеликих систем рівнянь.

Приклад 1.

Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$

Зведемо задану систему рівнянь до одного рівняння 2-го порядку для функції $x(t)$:
- диференціюємо перше рівняння за змінною t, похідну y' підставляємо з другого рівняння : $x'' = 2x' + y' = 2x' + 3x + 4y$;
- з першого рівняння знаходимо $y = x' - 2x$ і підставяємо в останнє рівняння.

Одержуємо рівняння 2-го порядку для функції $x(t)$: $x'' - 6x' + 5x = 0$.

Його характеристичне рівняння $k^2 - 6k + 5 = 0$ має корені $k_1 = 1$, $k_2 = 5$, тому загальним розв'язком цього рівняння є функція $x(t) = C_1e^t + C_2e^{5t}$, C_1, C_2 - довільні сталі.

Для знаходження функції $y(t)$ використаємо знайдений вище вираз $y = x' - 2x$. Підставивши сюди $x = C_1e^t + C_2e^{5t}$, $x' = C_1e^t + 5C_2e^{5t}$, одержимо $y(t) = C_1e^t + 5C_2e^{5t} - 2(C_1e^t + C_2e^{5t}) = -C_1e^t + 3C_2e^{5t}$.

Отже, розв'язком заданої системи є пара функцій $\begin{cases} x(t) = C_1e^t + C_2e^{5t}, \\ y(t) = -C_1e^t + 3C_2e^{5t}. \end{cases}$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = 6x - y, \\ z' = 6x + 4y. \end{cases}$$

Зведемо цю систему до одного рівняння вищого порядку для функції $x(t)$. Для цього знаходимо похідну

$$x'' = y'.$$

З другого рівняння заданої системи сюди підставляємо

$$y' = 6x - y \quad \Rightarrow \quad x'' = 6x - y = 6x - x'.$$

Отже, одержано рівняння другого порядку для функції x: $x'' + x' - 6x = 0$. Коренями його характеристичного рівняння k^2+k-6 є $k_1 = -3$, $k_2 = 2$, а загальним розв'язком -

функція $x(t) = C_1e^{-3t} + C_2e^{2t}$, C_1, C_2 - довільні сталі.

Обчислимо $x'(t) = -3C_1e^{-3t} + 2C_2e^{2t}$. Використовуючи ці вирази, а також перше і третє рівняння заданої системи, знаходимо

$$y(t) = x'(t) = -3C_1e^{-3t}+2C_2e^{2t}, \quad z' = 6x+4y = 6x+4x' = -6C_1e^{-3t}+12C_2e^{2t}.$$

Звідси $z(t) = \int z'(t)dt = 2C_1e^{-3t} + 6C_2e^{2t} + C_3$, C_3- довільна стала.

Одержуємо загальний розв'язок заданої системи рівнянь:

$$\begin{cases} x(t) = C_1e^{-3t} + C_2e^{2t}, \\ y(t) = -3C_1e^{-3t} + 2C_2e^{2t}, \\ z(t) = 2C_1e^{-3t} + 6C_2e^{2t} + C_3. \end{cases}$$

Лекція 12. Матричний метод розв'язування систем лінійних однорідних диференціальних рівнянь першого порядку.

Запишемо систему n лінійних однорідних рівнянь першого порядку з постійними коефіцієнтами

$$\begin{cases} y_1' = a_{1\,1}y_1 + a_{1\,2}y_2 + ... + a_{1\,n}y_n, \\ y_2' = a_{2\,1}y_1 + a_{2\,2}y_2 + ... + a_{2\,n}y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n' = a_{n\,1}y_1 + a_{n\,2}y_2 + ... + a_{n\,n}y_n, \end{cases} \tag{29}$$

в матричній формі:

$$Y' = AY, \tag{30}$$

$$\text{де} \quad Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ ... \\ y_n' \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix},$$

a_{ij}, $i, j = 1..n$, сталі.

Частинні розв'язки цієї системи будемо шукати у вигляді

$$y_1 = b_1 e^{kx}, \quad y_2 = b_1 e^{kx}, \cdots, y_n = b_n e^{kx}, \quad \text{або} \quad Y = e^{kx} B, \quad \text{де} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Для знаходження розв'язку потрібно визначити числа $k,\ b_1, b_2, ..., b_n$. Підставивши $Y = e^{kx} B$ в рівняння (30), одержуємо

$$Y' = k e^{kx} B = e^{kx} A\, B, \quad \text{звідки} \quad AB = kB = kIB, \quad \text{або} \quad (A - kI)B = 0,$$

де I - одинична матриця $n \times n$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 \end{pmatrix}; \quad A - kI = \begin{pmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} - k \end{pmatrix}$$

Матрично-векторна рівність $(A - kI)B = 0$ еквівалентна однорідній системі n лінійних алгебраїчних рівнянь з невідомими $b_1, b_2, ..., b_n$:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)b_1 + a_{12}b_2 + \cdots + a_{1n}b_n = 0, \\ a_{21}b_1 + (a_{22} - k)b_2 + \cdots + a_{2n}b_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}b_1 + a_{n2}b_2 + \cdots + (a_{nn} - k)b_n = 0. \end{cases} \tag{31}$$

Нетривіальні (ненульові) розв'язки однорідної системи n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими існують, якщо її визначник рівний нулю:

$$|A - kI| = \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0. \tag{32}$$

Вираз (32) являє собою рівняння степеня n відносно невідомої k, і називається ***характеристичним рівнянням*** матриці системи рівнянь (29),((30)).

Числа k (корені характеристичного рівняння) і відповідні матриці - стовбці B (або вектори B), для яких виконується рівність $AB = kB$, називаються ***власними значеннями і відповідними їм власними векторами*** матриці A. Отже, для розв'язання системи рівнянь (29) потрібно знайти власні значення і власні вектори матриці A.

Власні значення k знаходимо з характеристичного рівняння, розкривши визначник і прирівнявши його до нуля. Одержимо n коренів характеристичного рівняння, серед яких можуть бути прості і кратні.

Для знаходження власних векторів, що відповідають знайденим власним значенням, кожен з коренів k_j підставляємо в (31). Одержимо систему рівнянь, з якої знаходимо значення невідомих $b_1, b_2, ..., b_n$. Оскільки ці рівняння лінійно залежні, ранг r_j її матриці $A - k_j I$ менший за n $(r_j < n)$, тому матимемо $(n - r_j)$ вільних невідомих, яким можемо надати довільні значення, а решту r_j невідомих виразити через них.

Знайшовши корені характеристичного рівняння, тобто власні значення, і відповідні їм власні вектори матриці A, знаходимо частинні розв'язки і будуємо загальний розв'язок системи (29).

Розглянемо деякі випадки знаходження частинних розв'язків в залежності від властивостей коренів характеристичного рівняння.

1) Якщо k_i - простий корінь характеристичного рівняння (32), а B_i - відповідний йому власний вектор матриці A, то цьому кореню відповідає частинний розв'язок

$$Y_i = e^{k_i x} B_i \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = e^{k_i x} \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \cdots \\ b_{ni} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_{1i} = e^{k_i x} b_{1i}, \\ y_{2i} = e^{k_i x} b_{bi}, \\ \cdots\cdots\cdots, \\ y_{ni} = e^{k_i x} b_{ni}. \end{cases}$$

2) Якщо для кореня k кратності m маємо m лінійно незалежних власних векторів $B_1, ..., B_m$, то йому відповідають m частинних розв'язків

$$Y_1 = e^{kx} B_1, \quad Y_2 = e^{kx} B_2, \cdots, \quad Y_m = e^{kx} B_m.$$

3) Якщо для кореня k кратності m маємо $h < m$ лінійно незалежних власних векторів $B_1, ..., B_h$, то відповідний йому частинний розв'язок можна знайти за методом невизначених коефіцієнтів, шукаючи кожну з функцій $y_1, y_2, ..., y_n$ у вигляді добутку многочлена порядку $m - h$ на e^{kx}:

$$\begin{gathered} y_1 = (a + bx + \cdots + dx^{m-h}) e^k x \\ y_2 = (p + qx + \cdots + rx^{m-h}) e^k x \\ \cdots \\ y_n = (u + vx + \cdots + wx^{m-h}) e^k x \end{gathered}$$

Для визначення коефіцієнтів $a, b, ..., w$ функції $y_1, y_2, ..., y_n$ слід підставити в систему рівнянь (29), і в кожному з них прирівняти коефцієнти при однакових степенях змінної x в лівій і правій частинах. В результаті отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь з невідомими $a, b, ..., w$. Деякі з цих рівнянь лінійно незалежні, тому її розв'язок буде містити m довільних сталих.

За цією схемою для кожного з коренів характеристичного рівняння знаходимо відповідний йому частинний розвязок системи рівнянь (29).

Загальним її розв'язком є лінійна комбінація частинних розв'язків:

$$Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + \cdots + C_n Y_n.$$

Приклад 1.

Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -4x + y. \end{cases}$

В матричній формі запишемо

$$Y = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{dY}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Знайдемо корені характеристичного рівняння

$$|A-kI| = \begin{vmatrix} 1-k & 1 \\ -4 & 1-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (k-1)^2 = 4 \Rightarrow k_1 = -1, \quad k_2 = 3.$$

Записуємо систему рівнянь (31) для знаходження компонент b_1, b_2 власних векторів

$$\begin{cases} (1-k)b_1 + b_2 = 0, \\ -4b_1 + (1-k)b_2 = 0. \end{cases}$$

Для $k = k_1$, $k = k_2$ ці рівняння ріносильні, оскільки вони - лінійно залежні (ранг матриці системи дорівнює одиниці), тому можна використати довільне з них. Для $k = k_1 = -1$ з першого рівняння маємо $2b_1 + b_2 = 0$. Покладаємо $b_1 = 1$, тоді $b_2 = -2$. Отже, кореню $k_1 = -1$ відповідає власний вектор $B_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ і частинний розв'язок

$$Y_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = e^{k_1 t} B_1 = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = e^{-t}, \\ y_1(t) = -2e^{-t}, \end{cases}$$

C_1 - довільна стала.

Аналогічно для $k = k_2 = 3$ знаходимо $B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

і відповідно частинний розв'язок $Y_2(t) = e^{k_2 t} B_2 = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2(t) = e^{3t}, \\ y_2(t) = -2e^{3t}. \end{cases}$

Загальнимй розв'язок є лінійною комбінацією цих частинних розв'язків:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 Y_1(t) + C_2 Y_2(t) = C_1 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}, \\ y(t) = -2C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{3t}, \end{cases} \qquad C_1, C_2 - \text{довільні сталі.}$$

Лекція 13. Елементи теорії стійкості.

Нехай рух матеріальної точки на площині описується системою рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(t, x, y), \\ \frac{dy}{dt} = f_2(t, x, y), \end{cases} \tag{33}$$

і для її початкового положення (x_0, y_0) в момент $t = t_0$ знайдена відповідна траєкторія руху $x = x(t)$, $y = y(t)$, тобто розв'язана задача Коші для системи рівнянь (33) з початковими умовами $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$.

Нехай траєкторія руху точки знайдена також для випадку, коли в в момент $t = t_0$ її координати рівні (x_1, y_1); тоді розв'язками відповідної задачі Коші є функції $x = x_1(t)$, $y = y_1(t)$.

Рух матеріальної точки називається ***стійким***, якщо при достатьо малому відхиленні початкових положень $\sqrt{[x_0 - x_1]^2 + [y_0 - y_1]^2}$ відхилення траєкторій $\sqrt{[x(t)-x_1(t)]^2+[y(t)-y_1(t)]^2}$ буде залишатись малим і при $t>t_0$.

Означення 1. Розв'язок $x=x(t),\ y=y(t)$ системи рівнянь (33) називається ***стійким за Ляпуновим*** при $t\to\infty$, якщо для довільно малого $\varepsilon>0$ можна вказати таке $\delta>0$, що при всіх $t>t_0$ буде виконуватись нерівність $\sqrt{[x(t)-x_1(t)]^2+[y(t)-y_1(t)]^2}<\varepsilon$, якщо в початковий момент $t=t_0$ виконувалось $\sqrt{[x_0-x_1]^2+[y_0-y_1]^2}<\delta$.

Якщо для певного значення $\varepsilon>0$ такого δ вказати не можна, то розв'язок $x=x(t),\ y=y(t)$ називають ***нестійким.***

При цьому розв'язок $x=x(t),\ y=y(t)$ називається ***асимптотично стійким***, якщо він є стійким за Ляпуновим, а крім того, має місце

$$\lim_{t\to\infty}(x_1(t)-x(t))=0,\quad \lim_{t\to\infty}(y_1(t)-y(t))=0.$$

Нехай для системи рівнянь

$$\frac{dy_i}{dt}=f_i(t,y_1,y_2,\cdots,y_n)=0,\quad i=1...n, \tag{34}$$

знайдено розв'язок $Y_0(t)$ задачі Коші з початковими умовами $y_1(t_0)=y_{10},y_2(t_0)=y_{20},\cdots,y_n(t_0)=y_{n0}$:

$$Y_0(t)=\begin{pmatrix}\varphi_1(t)\\ \varphi_2(t)\\ \cdots\\ \varphi_n(t)\end{pmatrix}.$$

Означення 2. Розв'язок $Y_0(t)$ системи (34) називається ***стійким за Ляпуновим при*** $t\to\infty$, якщо знайдеться таке $\delta>0$, що всякий інший розв'язок

$$Y_1(t)=\begin{pmatrix}\psi_1(t)\\ \psi_2(t)\\ \cdots\\ \psi_n(t)\end{pmatrix},$$

знайдений для початкових умов $y_1(t_0)=y_{11},y_2(t_0)=y_{21},\cdots,y_n(t_0)=y_{n1}$, який при $t=t_0$ відрізняється від розв'язка $Y_0(t)$ менше, ніж на δ

$$||Y_0(t_0)-Y_1(t_0)||<\delta,$$

при всіх $t>t_0$ буде задовольняти умову $||Y_1(t)-Y_0(t)||<\varepsilon$.

В якості оцінки величини відхилення тут можна використати

Евклідову норму $||Y_0(t_0)-Y_1(t_0)||=\sqrt{[y_{10}-y_{11}]^2+[y_{20}-y_{21}]^2+...+[y_{n0}-y_{n1}]^2}$,

$$|Y_0(t)-Y_1(t)|=\sqrt{[\varphi_1(t)-\psi_1(t)]^2+[\varphi_2(t)-\psi_2(t)]^2+...+[\varphi_n(t)-\psi_n(t)]^2}.$$

Розв'язок $Y(t)$ називається ***асимптотично стійким***, якщо він є стійким за Ляпуновим, і має місце

$$\lim_{t\to\infty}(Y_0(t)-Y_1(t))=0.$$

Аналогічно формулюється поняття стійкості і асимптотичної стійкості розв'язків диференціального рівняння.

Означення 3. Нехай розв'язком задачі Коші

$$F(t,y,y',y'',...,y^{(n)})=0, \quad y(t_0)=y_0, y'(t_0)=y'_0,...,y^{(n-1)}(t_0)=y_0^{n-1}$$

є функція $y_0(t)$. Розв'язок $y_0(t)$ називається ***стійким за Ляпуновим при*** $t\to\infty$, якщо знайдеться таке $\delta>0$, що всякий інший розв'язок цього рівняння $y_1(t)$, який задовольняє початкові умови
$y_1(t_0)=y_1, y'_1(t_0)=y'_1,...,y_1^{(n-1)}(t_0)=y_1^{n-1}$ і при $t=t_0$ відрізняється від розв'язкау $y_0(t)$ менше, ніж на δ

$$|y_0(t_0)-y_1(t_0)|<\delta,$$

при всіх $t>t_0$ буде задовольняти умову $\quad |y_1(t)-y_0(t)|<\varepsilon.$

Дослідженнія стійкості розв'язку $Y_0(t)$ системи (34) зручно замінити дослідженням стійкості ***нульового*** розв'язку іншої системи, яка одержується з системи (34) в результаті переходу від функцій $y_i(t)$ до функцій $x_i(t)=y_i(t)-\varphi_i(t),\ i=1,...,n:$

$$\begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \cdots\\ x_n(t)\end{pmatrix}=Y(t)-Y_0(t)=\begin{pmatrix} y_1(t)-\varphi_1(t)\\ y_2(t)-\varphi_2(t)\\ \cdots\\ y_n(t)-\varphi_n(t)\end{pmatrix}.$$

Стійкість нульового розв'язку.

Наведемо деякі критерії, які можна застосувати для дослідження стійкості розв'язків диференціальних рівнянь та систем диференціальних рівнянь.

Нехай маємо систему рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt}=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+...+a_{in}x_n, \quad \text{де} \quad a_{ij}\ -\text{сталі} \quad (i,j=1,...,n). \qquad (35)$$

Очевидно, що система рівнянь (35) має розв'язок $x_i(t)\equiv 0, \quad i=1,...,n.$

Критерій стійкості розв'язків нормальної системи лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами встановлює наступна
теорема Ляпунова:

Якщо всі власні значення k матриці $\{a_{ij}\},\ i,j=1,...,n,$ системи (35) мають від"ємні дійсні частини, то її нульовий розв'язок асимптотично стійкий; якщо хоч би одне власне значення має додатню дійсну частину, то нульовий розв'язок нестійкий.

Для дослідження стійкості за допомогою теореми Ляпунова потрібно записати характеристичне рівняння і знайти його корені - власні значення матриці. Однак висновки про властивості коренів можна зробити і без їх безпосереднього обчислення, користуючись, зокрема, наведеними нижче критеріями.

Критерій Рауса-Гурвіца. Для того, щоб дійсні частини коренів характеристичного рівняння

$$a_0k^n + a_1k^n - 1 + ... + a_{n-1}k + a_n = 0, \quad a_0 > 0, \tag{36}$$

були ***від'ємними***, необхідно і достатньо, щоб ***додатніми*** були всі головні діагональні мінори ***визначника Гурвіца***

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ ... & ... & ... & & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

Отже, додатніми повинні бути мінори

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, ...$$

Мінор найвищого можливого порядку співпадає з самим визначником Гурвіца.

Для формулювання наступного критерію стійкості розв'язків системи рівнянь (35) складемо її характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0,$$

і розкривши визначник, підставимо $k = i\omega$, де i - уявна одиниця, ω - дійсна змінна. Виділивши дійсну і уявну частини , запишемо ліву частину характеристичного рівняння у вигляді

$$F(i\omega) = p(\omega^2) + i\omega\, q(\omega^2), \quad \text{де} \quad p(\omega^2),\ q(\omega^2)\ -\ \text{многочлени :}$$

$$p(\lambda) = a_n - a_{n-2}\lambda + a_{n-4}\lambda^2 - ..., \quad q(\eta) = a_{n-1} - a_{n-3}\eta + a_{n-5}\eta^2 - ... .$$

Змінюючи ω, побудуємо ***годограф*** - графік функції $F(i\omega)$ на комплексній площині.

Критерій Михайлова: Для того, щоб корені характеристичного рівняння мали від'ємні дійсні частини, необхідно і достатньо, щоб годограф не проходив через початок координат, і описав навколо нього кут $\pi n/2$ при $0 \le \omega < \infty$. Точка $F(i\omega)$ при збільшенні ω повинна рухатись лише в додатньому напрямку.

Інше формулювання цього критерію: необхідно і достатньо, щоб корені $\lambda_1, \lambda_2, ..., \eta_1, \eta_2, ...$ многочленів $p(\lambda)$, $q(\eta)$ були всі простими, додатніми і чергувались в наступному порядку: $0 < \lambda_1 < \eta_2\lambda_2\eta_2 < ...$, при цьому має виконуватись $a_na_{n-1} > 0$.

Приклад 1. Встановити, чи всі корені рівняння $3k^4 + 4k^3 - k + 2 = 0$ мають додатні дійсні частини.

1)Використаємо критерій Рауса-Гурвіца.

Складемо визначник Гурвіца: $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

Обчислюємо головні діагональні мінори:

$$\Delta_1 = 4 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -35 < 0.$$

Мінор Δ_3 - від'ємний. Отже, деякі з коренів рівняння мають додатні дійсні частини. Перевіряти мінор Δ_4 немає потреби.

2)Використаємо критерій Михайлова (друге формулювання).
Маємо $n = 4$, $a_n \equiv a_4 = 2 > 0$, $a_{n-1} \equiv a_3 = -1 < 0$. Не виконується одна з умов цього критерію, отже, приходимо до попереднього висновку.

Стійкість нульового розв'язку і фазові траєкторії.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \quad \text{де } a_{ik},\ i,k = 1,2 \ - \text{ дійсні числа.} \tag{37}$$

Нехай розв'язком цієї задачі для деяких початкових умов, заданих при $t = t_0$, є пара функцій $x = x(t)$, $y = y(t)$.
Параметрично задана на площині xOy лінія $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases} \quad t_0 \leq t < \infty,$
називається ***фазовою траєкторією*** даного розв'язку, а сукупність графіків, що відображають всі можливі типи розв'язків - ***фазовим портретом*** даної системи.

Очевидно, що $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ є розв'язком даної системи. ***Особливою точкою*** системи рівнянь (37) називається точка, в якій кожна з похідних в лівій частині рівна нулю. Для системи (37) особливою є нульова точка
$x_1 = 0, x_2 = 0, \cdots, x_n = 0$, яка відповідає нульовому розв'язку.

Дослідження його стійкості, згідно попередньому, грунтується на властивостях коренів характеристичного рівняння.

В поданій нижче таблиці наведені типи деяких особливих точок відповідно до характеру фазових траєкторій, побудованих в їх околі,і вказані відповідні властивості коренів k_1, k_2 характеристичного рівняння.

Приклад 2. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 5y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$$

Запишемо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 3-k & 5 \\ 1 & -1-k \end{vmatrix} = k^2 - 2k - 8 = 0.$$

Його коренями є числа $k_1 = 5 > 0$, $k_2 = -3 < 0$. Корені дійсні, один з них - додатній, отже, нульовий розв'язок - нестійкий, і являє собою особливу точку типу "сідло".

ЗМІСТ